

Valeurs aux T-uplets d'entiers négatifs  
de séries zêtas multivariées  
associées  
à des polynômes de plusieurs variables.

Marc de Crisenoy  
adresse électronique : mdecrise@math.unicaen.fr

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme  
CNRS UMR 6139  
LMNO  
Université de Caen BP 5186  
F 14032 Caen Cedex

## Introduction

Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  et  $\mu_1, \dots, \mu_N$  des nombres complexes de module 1. On considère la série de Dirichlet généralisée suivante :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mu_1, \dots, \mu_N, s_1, \dots, s_T) = \sum_{m_1 \geq 1, \dots, m_N \geq 1} \frac{(\prod_{n=1}^N \mu_n^{m_n}) Q(m_1, \dots, m_N)}{\prod_{t=1}^T P_t(m_1, \dots, m_N)^{s_t}}$$

où  $(s_1, \dots, s_T) \in \mathbb{C}^T$ .

Le prolongement de ces séries a été étudié successivement par Mahler ([29]), Mellin ([31]), Cassou-Noguès ([9]), Sargos ([32]), Lichtin ([26]) et Essouabri ([23]).

Une simple adaptation du résultat de [23] permet de voir que si  $P_1, \dots, P_T$  vérifient l'hypothèse probablement optimale  $H_0S$  (voir ci-dessous), alors cette série se prolonge méromorphiquement à  $\mathbb{C}^T$ . On s'attend à ce que, lorsque la série est réellement tordue (c'est à dire lorsque  $\mu_1, \dots, \mu_N$  sont tous différents de 1) le prolongement soit holomorphe. Comme nous le montrerons sur un exemple, ce n'est pas toujours le cas. Dans ce travail nous introduisons une classe de polynômes contenant strictement celle des polynômes à coefficients positifs et contenu dans celle des polynômes vérifiant  $H_0S$ . Nous montrons que dans cette classe le prolongement de  $Z$  est **holomorphe** sur  $\mathbb{C}^T$ . L'utilisation de ces séries multivariées (ie  $T$  quelconque) fournit le cadre naturel d'un **lemme d'échange** crucial. De ce lemme d'échange on déduit le principal résultat de ce travail à savoir des formules simples et explicites pour les valeurs aux points  $\mathbf{s} = (-k_1, \dots, -k_T) \in (-\mathbb{N})^T$  ( $T$ -uplet d'entiers négatifs). Nous transformons alors ces formules pour retrouver celles de Cassou-Noguès permettant de réaliser l'interpolation  $p$ -adique. Rappelons qu'elle en avait déduit l'existence des fonctions zêtas  $p$ -adique associées aux corps de nombres totalement réels. Ce résultat avait aussi été obtenu indépendamment par Barsky ([5]) et Deligne-Ribet ([21]).

L'étude des valeurs aux entiers négatifs de séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables est un ancien problème lié en particulier aux propriétés de divers fonctions zêta intervenant dans l'arithmétique des corps de nombres (fonction zêta de Dedekind...cf Shintani ([36])). Les résultats les plus importants en lien avec notre travail sont ceux obtenus par Pierrette Cassou-Noguès ([7] et [9]) dans le cas d'un polynôme à coefficients positifs ( $T = 1$ ). Citons aussi le travail de Kwang-Wu Chen et Minking Eie ([14]) qui ont obtenu sous les mêmes hypothèses que Pierrette Cassou-Noguès et par

des méthodes semblables aux siennes des formules très simples pour les valeurs aux entiers négatifs  $-k$ .

Dans notre travail nous obtenons des formules aussi simples que celles de Kwang-Wu Chen et Minking Eie mais pour une classe plus générale de polynômes (classe HDF) et pour des séries associées à plusieurs polynômes ( $T$  quelconque). Par ailleurs nos méthodes sont radicalement différentes de celles utilisées par Cassou-Noguès et Chen-Eie; nous espérons que la méthode du lemme d'échange donne une meilleure compréhension de la nature de ces formules.

Signalons enfin que lorsque les séries ne sont pas (forcément) tordues le cas très particulier des formes linéaires a été étudié par divers auteurs (Akiyama, Egami et Tanigawa dans [1]; Akiyama et Ishikawa dans [2]; Akiyama et Tanigawa dans [3]; Arakawa et Kaneko dans [4]; Egami et Matsumoto dans [22]; Zhao dans [42] ...).

## Plan

Enoncés des principaux résultats.

Quelques remarques.

Des lemmes sur les polynômes à plusieurs variables.

Prolongement holomorphe des intégrales  $Y$ .

Domaine de convergence de  $Z$ .

Représentation intégrale.

Preuve du théorème 1.

Lemme d'échange et valeurs de  $Z$  aux points de  $(-\mathbb{N})^T$ .

Une formule pour les valeurs de  $\zeta_\mu$  aux entiers négatifs.

Preuve des théorèmes 4 et 5.

## Enoncés des principaux résultats

**Convention** : dans tout ce travail on dira d'une série à  $N \geq 1$  variables qu'elle est convergente lorsqu'elle est sommable (au sens des familles sommables).

En particulier, une série à une variable est dite convergente lorsqu'elle est absolument convergente.

**Notation 1.** On note  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  et  $J = [1, +\infty[$ .

**Définition 2.** Soit  $\mu \in \mathbb{T}$ .

On pose  $\zeta_\mu(s) = \sum_{m \geq 1} \frac{\mu^m}{m^s}$ .

**Définition 3.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  tels que  $\forall 1 \leq t \leq T \quad \forall \mathbf{x} \in J^N \quad P_t(\mathbf{x}) > 0$ .

Soit  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{T}^N$ .

On pose :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, s_1, \dots, s_T) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$$

**Remarque 4.** Pour  $\mu \in \mathbb{T}$  on a :  $Z(1, X, \mu, \cdot) = \zeta_\mu$ .

Introduisons une nouvelle classe de polynômes :

**Définition 5.** soit  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$

On dit que  $P$  vérifie l'hypothèse raisonnable (abrégée en HDF dans toute la suite) si :

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad P(\mathbf{x}) > 0$$

$$\exists \epsilon_0 \text{ tel que } \alpha \in \mathbb{N}^N \quad \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in J^N)$$

Notre premier résultat est de montrer que pour les polynômes appartenant à cette classe,  $Z$  possède un prolongement **holomorphe** :

**Théorème 1.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ .

On suppose que :

$$\star \forall 1 \leq t \leq T \quad P_t \text{ vérifie HDF}$$

$$\star \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{\mathbf{x} \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty.$$

Soit de plus  $\mu \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ .

Alors :

$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mu, \cdot)$  possède un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}^T$ .

Le résultat suivant est crucial pour la suite :

**Théorème 2. (lemme d'échange)**

Soient  $P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  et  $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ .

On suppose que :

$$\star P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'} \text{ vérifient HDF}$$

$$\star \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty$$

$$\star \prod_{t=1}^{T'} Q_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty$$

Soient de plus  $\mu \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$  et  $k_1, \dots, k_T, l_1, \dots, l_{T'} \in \mathbb{N}$ .

Alors :

$$Z \left( Q \prod_{t=1}^{T'} Q_t^{l_t}, P_1, \dots, P_T, \mu, -k_1, \dots, -k_T \right) = Z \left( Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}, Q_1, \dots, Q_{T'}, \mu, -l_1, \dots, -l_{T'} \right)$$

Du lemme d'échange on déduit des formules particulièrement simples pour les valeurs aux points de  $(-\mathbb{N})^T$  :

**Théorème 3.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ .

On suppose que :

a)  $P_1, \dots, P_T$  vérifient HDF

$$b) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty.$$

Soient  $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$ . On note  $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t} = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$ .

Soit de plus  $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ .

Alors :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -k_1, \dots, -k_T) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$$

De ces formules on déduit les suivantes, qui permettent l'interpolation p-adique :

**Théorème 4.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ .

On suppose que :

a)  $P_1, \dots, P_T$  vérifient HDF,

$$b) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty.$$

Soit  $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ .

Alors pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^N$  on a :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \frac{\mu^1}{(1-\mu)^1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{(1-\mu)^\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ (-1)^{|\mathbf{j}|} \binom{\ell}{\mathbf{j}} Q(-\mathbf{j}) \prod_{t=1}^T P_t(-\mathbf{j})^{k_t} \right\}$$

formule dans laquelle la somme sur  $\ell$  est en fait une somme finie.

On a en fin le :

**Théorème 5.** Soit  $p$  un nombre premier.

On fixe un morphisme de corps de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}_p$ , il sera sous entendu dans les écritures.

Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$ .

On suppose que :

a)  $P_1, \dots, P_T$  vérifient HDF,

$$b) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty,$$

c)  $\forall t \in \{1, \dots, T\} \forall \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^N \ p \nmid P_t(\mathbf{j})$ .

Soit  $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ .

On suppose que  $\forall n \in \{1, \dots, N\} \ |1 - \mu_n|_p > p^{-\frac{1}{p-1}}$ .

Soit  $\mathbf{r} \in \{0, \dots, p-1\}^T$ .

Alors il existe  $Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot) : \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$  continue telle que :

$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$  vérifiant  $\forall t \in \{1, \dots, T\} \ k_t = r_t \ [p-1]$ , on ait :

$$Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}).$$

# Quelques remarques

Rappelons les définitions de deux classes usuelles de polynômes :

**Notation 6.** Si  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  s'écrit  $P(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$ , alors on note  $P^+(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} |a_\alpha| \mathbf{X}^\alpha$

**Définition 7.**  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N] \setminus \{0\}$  est dit non dégénéré si  $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in J^N$ )

Pour plus de détails sur la notion de polynôme non dégénéré, on pourra consulter par exemple [32].

**Définition 8.** soit  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ .

$P$  est dit hypoelliptique s'il vérifie les trois conditions suivantes :

$P$  n'est pas constant

$\forall \mathbf{x} \in J^N$   $P(\mathbf{x}) > 0$

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{0\}$   $\frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0$

**Remarque 9.** Les polynômes non dégénérés et les polynômes hypoelliptiques vérifient HR.

Dans [23], Essouabri a introduit une nouvelle classe de polynômes qui contient les deux précédentes :

**Définition 10.** soit  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$

On dit que  $P$  vérifie l'hypothèse  $H_0S$  si :

$\forall \mathbf{x} \in J^N$   $P(\mathbf{x}) > 0$

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$   $\frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \ll 1$  ( $\mathbf{x} \in J^N$ )

Clairement les méthodes [23] de permettent de montrer le résultat suivant :

**Théorème 6.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ .

On suppose que :

$\star \forall 1 \leq t \leq T$   $P_t$  vérifie  $H_0S$ .

$\star \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty$ .

Soit de plus  $\mu \in \mathbb{T}^N$ .

Alors :

$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mu, \cdot)$  possède un prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}^T$ .

**Remarque 11.** Il est clair que la classe des polynômes vérifiant HDF est incluse dans la classe des polynômes vérifiant  $H_0S$ . L'exemple suivant montre que l'inclusion est stricte.

**Exemple 12.** Dans [23] Driss Essouabri remarque que  $P(X, Y) = (X - Y)^2 X + X \in \mathbb{R}[X, Y]$  vérifie  $H_0S$  mais qu'il n'est pas hypoelliptique et qu'il est dégénéré.

En fait  $\forall x \geq 1$   $\frac{\partial P}{\partial y}(x, x+1) = -1$  et donc  $P$  ne vérifie pas HDF.

Ce polynôme est intéressant car il montre que le théorème 1 peut être faux sous  $H_0S$ . C'est l'objet de l'exemple suivant :

**Exemple 13.** Soit  $P(X, Y) = (X - Y)^2 X + X \in \mathbb{R}[X, Y]$ .

Alors :

$Z(1, P, -1, -1, \cdot)$  possède un prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}$ .

1 est l'unique pôle du prolongement, il est simple de résidu  $\frac{\pi}{\sinh(\pi)}$ .

**Preuve :**

Durant cette preuve, on pose  $Z = Z(1, P, -1, -1, \cdot)$ .

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \sum_{m, n \geq 1} (-1)^m (-1)^n [(m-n)^2 m + m]^{-s} \\
&= \sum_{m, n \geq 1} (-1)^{m-n} m^{-s} [(m-n)^2 + 1]^{-s} \\
&= \sum_{1 \leq m \leq n} (-1)^{m-n} m^{-s} [(m-n)^2 + 1]^{-s} + \sum_{1 \leq n < m} (-1)^{m-n} m^{-s} [(m-n)^2 + 1]^{-s}
\end{aligned}$$

En posant  $n = m + u$  dans la première somme et  $m = n + u$  dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \sum_{\substack{m \geq 1 \\ u \geq 0}} (-1)^u m^{-s} (u^2 + 1)^{-s} + \sum_{n, u \geq 1} (-1)^u (n+u)^{-s} (u^2 + 1)^{-s} \\
&= \zeta(s) \sum_{u \geq 0} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} + \sum_{u \geq 1} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} \sum_{n \geq 1} (n+u)^{-s} \\
&= \zeta(s) \sum_{u \geq 0} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} + \sum_{u \geq 1} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} \left[ \zeta(s) - \sum_{1 \leq k \leq u} k^{-s} \right] \\
&= \zeta(s) \sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} - \sum_{1 \leq k \leq u} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} k^{-s} \\
&= \zeta(s) \sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} - \sum_{\substack{k \geq 1 \\ l \geq 0}} (-1)^{k+l} [(k+l)^2 + 1]^{-s} k^{-s}
\end{aligned}$$

Les deux observations suivantes permettent de conclure :

- \* c'est une application classique du théorème des résidus de montrer que  $\sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-1} = \frac{\pi}{\sinh(\pi)}$ ,
- \* le théorème 1 permet d'affirmer que  $s \mapsto \sum_{\substack{k \geq 1 \\ l \geq 0}} (-1)^{k+l} [(k+l)^2 + 1]^{-s} k^{-s}$  se prolonge holomorphiquement à  $\mathbb{C}$ .

## Des lemmes sur les polynômes à plusieurs variables

**Lemme 14.** Soient  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  et  $1 \leq n \leq N$ .

On suppose que  $P$  dépend effectivement de  $X_n$ .

Alors :

il existe  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  tel que  $\alpha_n \geq 1$  et  $\partial^\alpha P$  soit constant et non nul.

**Preuve :**

On note  $S = \text{supp}(P)$  et  $P(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$ .

Notons  $d_n = \deg_{X_n} P$ , on a alors  $d_n \geq 1$ .

On prend  $\alpha \in S$  tel que  $\alpha_n = d_n$  et  $|\alpha| = \max\{|\beta| \mid \beta \in S, \beta_n = d_n\}$

Soit  $\beta \in S \setminus \{\alpha\}$ , si  $\beta_n < d_n$  alors  $\partial^\alpha(\mathbf{X}^\beta) = 0$ , si  $\beta_n = d_n$  alors  $|\beta| \leq |\alpha|$  et  $\beta \neq \alpha$  donc  $\exists i \in [[1, N]]$  tel que  $\beta_i < \alpha_i$ , d'où  $\partial^\alpha(\mathbf{X}^\beta) = 0$

On déduit de ceci que  $\partial^\alpha P = \partial^\alpha(a_\alpha \mathbf{X}^\alpha) = a_\alpha \alpha!$  donc  $\alpha$  convient.

**Lemme 15.** Si  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  vérifie  $H_0 S$  alors  $P(\mathbf{x}) \gg 1$  ( $\mathbf{x} \in J^N$ ).

**Preuve :**

si  $P$  est constant, c'est clair.

On suppose  $P$  non constant ; il existe alors  $n$  tel que  $P$  dépende effectivement de  $X_n$ .

Le lemme 14 fournit  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  tel que  $\alpha_n \geq 1$  et  $\partial^\alpha P$  soit constant et non nul.

$P(\mathbf{x}) \gg \partial^\alpha P(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in J^N$ ) donne alors le résultat.

**Lemme 16.** Soient  $0 \leq N_1 \leq N$  et  $C$  un compact de  $\mathbb{R}^{N_1}$ .

Soit  $P \in \mathbb{C}(X_1, \dots, X_N)$ .

On suppose que :

$$R(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in C \times J^{N-N_1}}]{} 0.$$

Alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que :

$$R(\mathbf{x}) \ll \left( \prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in C \times J^{N-N_1})$$

**Preuve :**

la preuve repose sur le principe de Tarski-Saidenberg qui est un outil classique de géométrie algébrique réelle. Pour plus de détails on pourra consulter par exemple [23].

## Prolongement holomorphe des intégrales Y

**Notation 17.** pour  $1 \leq t \leq T$  on note  $\mathbf{e}_t = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^T$ .

**Définition 18.** Pour  $r \in \mathbb{R}$  on pose :

$\mathcal{B}(r) = \{f : [r, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} f_n : [r, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C} \text{ } C^\infty \text{ bornée vérifiant } f_0 = f \text{ } f'_{n+1} = f_n\}$ .

$\mathcal{B}(r)$  est clairement un sous espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{[r, +\infty[}$ .

**Lemme 19.** Soient  $r \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{B}(r)$ .

Alors :

1) il existe une unique suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $f_n \in \mathbb{C}^{[r, +\infty[}$  telle que :

★  $\forall n \text{ } f_n \text{ est } C^\infty \text{ bornée}$

★  $f_0 = f$

★  $\forall n \text{ } f'_{n+1} = f_n$

2)  $\forall n \in \mathbb{N} \text{ } f_n \in \mathcal{B}(r)$ .

**Preuve :**

1) soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convenant.

Montrons par récurrence sur  $n \geq 0$  que  $f_n = g_n$ .

C'est clair pour  $n = 0$ .

Si l'on a  $f_n = g_n$ , alors :

$$f''_{n+2} = f'_{n+1} = f_n = g_n = g'_{n+1} = g''_{n+2}.$$

$f''_{n+2} = g''_{n+2}$  donc  $f_{n+2} - g_{n+2}$  est une fonction affine sur  $[r, +\infty[$ , or elle est bornée, donc elle est constante, donc sa dérivée est nulle, c'est à dire  $f_{n+1} - g_{n+1} = 0$ , d'où  $f_{n+1} = g_{n+1}$ .

2)  $f_n \in \mathcal{B}(r)$  est clair.

Le lemme suivant ne sera pas utilisé par la suite, mais répond à une question naturelle sur la classe  $\mathcal{B}(r)$ .

**Lemme 20.** Soient  $r \in \mathbb{R}$  et  $f : [r, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ .

Alors sont équivalents :

i)  $f \in \mathcal{B}(r)$

ii)  $\forall n \exists g : [r, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C} \ C^\infty$  bornée telle que  $g^{(n)} = f$ .

**Preuve :**

i)  $\Rightarrow$  ii)

Il suffit de remarquer que  $f_n^{(n)} = f$ .

ii)  $\Rightarrow$  i)

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on choisit  $g_n : [r, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C} \ C^\infty$  bornée telle que  $g_n^{(n)} = f$ .

$(g'_{n+1})^{(n)} = f = g_n^{(n)}$  donc  $\exists P_n \in \mathbb{C}[X]$  de degré au plus  $n - 1$  tel que  $g'_{n+1} - g_n = P_n$ .

On note  $h_n = \Re(g_n)$  et  $R_n$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  dont les coefficients sont les parties réelles de ceux de  $P_n$ . Il vient  $h'_{n+1} - h_n = R_n$ .

Supposons  $R_n$  non constant.

Si son coefficient dominant est strictement positif, alors  $R_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  donc

$h'_{n+1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  puis  $h_{n+1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , ce qui est absurde puisque  $h_{n+1}$  est bornée.

On montre de même que le coefficient dominant de  $R_n$  ne peut être strictement négatif.

On a une contradiction, donc  $R_n$  est constant.

En raisonnant de manière similaire sur les parties imaginaires on montre que  $\Im(g'_{n+1} - g_n)$  est constante.

On conclut de ce qui précède que  $g'_{n+1} - g_n$  est une fonction constante.

Pour tout  $n$  on pose  $f_n = g'_{n+1}$ .

Alors :

★  $f_n$  est  $C^\infty$  bornée,

★  $f_0 = g'_1 = f$ ,

★  $f'_{n+1} - f_n = g''_{n+2} - g'_{n+1} = (g'_{n+2} - g_{n+1})' = 0$ .

On en conclut que  $f \in \mathcal{B}(r)$ .

Donnons deux exemples de familles de fonctions appartenant à  $\mathcal{B}(r)$ , le premier est l'exemple "typique", le deuxième servira dans la preuve du théorème 1.

**Exemple 21.** Soit  $r \in \mathbb{R}$ .

1) Soit  $f : [r, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  qui soit  $C^\infty$  et périodique de valeur moyenne nulle.

Alors  $f \in \mathcal{B}(r)$ .

2) Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{C}$ .



On suppose  $\beta \neq 0$ ,  $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}$  et  $|a| \neq 1$ .

Alors  $f : [r, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(x) = \frac{\exp(i\alpha x)}{1 - a \exp(i\beta x)}$  est dans  $\mathcal{B}(r)$ .

**Preuve :**

1) le développement en série de Fourier de  $f$  donne le résultat.

2)  $\star$  cas  $|a| < 1$  :

$$f(x) = \exp(i\alpha x) \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \exp(ik\beta x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \exp(i(\alpha + k\beta)x)$$

On pose donc, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{(i(\alpha + k\beta))^n} \exp(i(\alpha + k\beta)x)$

$f_n$  est  $C^\infty$  bornée,  $f'_{n+1} = f_n$ ,  $f_0 = f$ ; donc  $f \in \mathcal{B}(r)$ .

$\star$  cas  $|a| > 1$  :

$f(x) = \frac{a^{-1} \exp(-i\beta x) \exp(i\alpha x)}{a^{-1} \exp(-i\beta x) - 1} = -a^{-1} \frac{\exp(i(\alpha - \beta)x)}{1 - a^{-1} \exp(i(-\beta)x)}$  qui est dans  $\mathcal{B}(r)$  par le cas précédent.

**Théorème 7.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$  et  $0 \leq N_1 \leq N$ .

On suppose que :

a)  $\forall 1 \leq t \leq T$  on a :

- $\star \forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \quad P_t(\mathbf{x}) \notin \mathbb{R}_-$
- $\star |P_t(\mathbf{x})| \gg 1 \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1})$

b)  $\prod_{t=1}^T |P_t(\mathbf{x})| \xrightarrow[\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} +\infty$

c)  $\exists \epsilon > 0$  tel que :  $\alpha \in \{0\}^{N_1} \times \mathbb{N}^{N-N_1} \quad \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha P_t}{P_t}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon} \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1})$

Soient de plus  $f : [-1, 1]^{N_1} \rightarrow \mathbb{C}$  continue et  $f_{N_1+1}, \dots, f_N \in \mathcal{B}(1)$ .

On pose :

$$Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_{N_1+1}, \dots, f_N, f, \mathbf{s}) = \int_{[-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}} Q(\mathbf{x}) \left( \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \right) f(x_1, \dots, x_{N_1}) \left( \prod_{n=N_1+1}^N f_n(x_n) \right) d\mathbf{x}$$

Alors :

1)  $\exists \sigma_0$  tel que :

$\mathbf{s} \mapsto Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_{N_1+1}, \dots, f_N, f, \mathbf{s})$  existe et soit holomorphe sur  $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall 1 \leq t \leq T \quad \sigma_t > \sigma_0\}$

2)  $Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_{N_1+1}, \dots, f_N, f, \cdot)$  possède un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}^T$ .

**Preuve**

Grâce à 16 il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que :

$$\prod_{t=1}^T |P_t(\mathbf{x})| \gg \left( \prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1})$$

Quitte à diminuer  $\epsilon_0$  on peut bien sur imposer que l'on ait de plus :

$$\alpha \in \{0\}^{N_1} \times \mathbb{N}^{N-N_1} \quad \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha P_t}{P_t}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1})$$

1) Preuve de l'existence de  $\sigma_0$  :

Soit  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  que l'on va déterminer par la suite.

Soit  $K$  compact de  $\mathbb{C}^T$  inclus dans  $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall 1 \leq t \leq T \ \sigma_t > \sigma_0\}$ .

★ Soit  $1 \leq t \leq T$ .

$|P_t(\mathbf{x})| \gg 1$  ( $\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$ ) donc  $\exists c > 0$  tel que  $\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \ |P_t(\mathbf{x})| \geq c$ .

$\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \ c^{-1}|P_t(\mathbf{x})| \geq 1$  donc :  $\sigma_t > \sigma_0 \Rightarrow (c^{-1}|P_t(\mathbf{x})|)^{\sigma_t} \geq (c^{-1}|P_t(\mathbf{x})|)^{\sigma_0}$ .

On en déduit  $|P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_t} \gg |P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_0}$  ( $\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \ \mathbf{s} \in K$ )

$|P_t(\mathbf{x})^{s_t}| = |P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_t} \exp[-\tau_t \arg P_t(\mathbf{x})]$  donc  $|P_t(\mathbf{x})^{s_t}| \gg |P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_t}$  ( $\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \ \mathbf{s} \in K$ ).

On conclut de ce qui précède que :  $|P_t(\mathbf{x})^{-s_t}| \ll |P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_0}$ .

★ Il vient donc :  $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \ll \left[ \prod_{t=1}^T |P_t(\mathbf{x})| \right]^{-\sigma_0}$  ( $\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \ \mathbf{s} \in K$ )

On suppose désormais  $\sigma_0 > 0$ , alors  $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \ll \left( \prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{-\sigma_0 \epsilon_0}$  ( $\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \ \mathbf{s} \in K$ )

On note  $q = \max\{\deg_{x_n} Q \mid N_1 + 1 \leq n \leq N\}$  (on peut évidemment supposer  $Q \neq 0$ ).

On a alors :

$$Q(\mathbf{x}) \left( \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \right) f(x_1, \dots, x_{N_1}) \prod_{n=N_1+1}^N f_n(x_n) \ll \left( \prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{q-\sigma_0 \epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \ \mathbf{s} \in K)$$

Ceci conduit à faire le choix suivant :  $\sigma_0 = \frac{q+2}{\epsilon_0} > 0$ .

Le théorème garantissant l'holomorphie de fonctions définies à l'aide d'intégrales permet de conclure.

2) Preuve de l'existence d'un prolongement holomorphe dans le cas  $N_1 = 0$ .

On adopte quelques conventions, valables durant la preuve de cette partie :

★ on dira qu'une fonction  $Y$  est combinaison entière des fonctions  $Y_1, \dots, Y_k$  s'il existe des fonctions  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k : \mathbb{C}^T \rightarrow \mathbb{C}$  entières telles que  $Y = \lambda + \sum_{i=1}^k \lambda_i Y_i$ .

★ les polynômes  $P_1, \dots, P_T$  sont fixés pour toute la preuve, donc on abrège  $Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_1, \dots, f_N, \cdot)$  en  $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \cdot)$ .

★  $\mathcal{B}$  désigne  $\mathcal{B}(1)$ .

La preuve se fait par récurrence sur  $N$ .

L'examen du passage du rang  $N-1$  au rang  $N$  permet de montrer le résultat au rang  $N=1$ , le résultat au rang  $N=0$  étant évident. Ceci dit, par commodité pour le lecteur, nous allons tout de même détailler la preuve au rang  $N=1$ .

Preuve du résultat au rang  $N=1$ .

Soient donc  $Q, P \in \mathbb{C}[X]$  où  $P$  est non constant et vérifie  $\forall x \in [1, +\infty[ \ P(x) \notin \mathbb{R}_-$ .

Soit de plus  $f \in \mathcal{B}$ .

On veut montrer que  $Y(Q, f, \cdot)$  définie par  $Y(Q, f, s) = \int_1^{+\infty} Q(x) P(x)^{-s} f(x) dx$  se prolonge holomorphiquement à  $\mathbb{C}$ .

On note  $p = \deg P$  et  $q = \deg Q$ .

On constate que  $Y(Q, f, \cdot)$  est holomorphe sur  $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{q+1}{p}\right\}$ .

Montrons par récurrence sur  $m \geq 0$  que  $\forall Q \in \mathbb{C}[X] \quad \forall f \in \mathcal{B} \quad Y(Q, f, \cdot)$  se prolonge holomorphiquement à  $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{q+1-m}{p}\right\}$ .

★ Au rang  $m = 0$  le résultat est clair.

★ Supposons le résultat vrai au rang  $m$ .

$f \in \mathcal{B}$  donc le lemme 19 associe à  $f$  une suite de fonctions appartenant à  $\mathcal{B}$ , on note  $f^1$  le premier terme de cette suite.

Grâce à une intégration par parties on a :

$$Y(Q, f, s) = [Q(x)P(x)^{-s}f^1(x)]_{x=1}^{x=+\infty} - \int_1^{+\infty} (Q'(x)P(x)^{-s} + Q(x)(-s)P'(x)P(x)^{-(s+1)})f^1(x)dx$$

Ceci s'écrit :  $Y(Q, f, s) = -Q(1)P(1)^{-s}f^1(1) - Y(Q', f^1, s) + sY(QP', f^1, s+1)$ .

Puisque  $\deg Q = q - 1$ , par hypothèse de récurrence,  $Y(Q', f^1, \cdot)$  se prolonge holomorphiquement à  $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{(q-1)+1-m}{p}\right\}$ .

Puisque  $\deg(QP') = q + p - 1$ , par hypothèse de récurrence,  $s \mapsto Y(QP', f^1, s+1)$  se prolonge holomorphiquement à  $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{(q+p-1)+1-m}{p} - 1\right\}$ .

Or  $\frac{(q-1)+1-m}{p} = \frac{(q+p-1)+1-m}{p} - 1 = \frac{q+1-(m+1)}{p}$ , on a donc démontré le résultat au rang  $m+1$ .

Preuve du passage du rang  $N-1$  au rang  $N$ .

Désormais on suppose le résultat vrai au rang  $N-1$  et l'on souhaite prouver le résultat au rang  $N$ .

La preuve est découpée en 10 étapes.

Etape 1 :

$f_1 \in \mathcal{B}$  donc le lemme 19 associe à  $f_1$  une suite de fonctions appartenant à  $\mathcal{B}$ , on note  $f_1^1$  le premier terme de cette suite.

On a alors que  $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de  $Y(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  et des

$Y(Q \frac{\partial P_t}{\partial x_1}, f_1^1, f_2, \dots, f_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t)$  où  $1 \leq t \leq T$ .

Preuve de l'étape 1 :

$$\begin{aligned} Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s}) &= \int_{J^N} Q(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \prod_{n=1}^N f_n(x_n) d\mathbf{x} \\ &= \int_{J^{N-1}} \left\{ \int_1^{+\infty} Q(\mathbf{x}) \left( \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \right) f_1(x_1) dx_1 \right\} \prod_{n=2}^N f_n(x_n) \prod_{n=2}^N dx_n \end{aligned}$$

L'expression entre accolades est, grâce à une intégration par parties par rapport à  $x_1$ , la différence de :

$$\left[ Q(\mathbf{x}) \left( \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \right) f_1^1(x_1) \right]_{x_1=1}^{x_1=+\infty}$$

et de  $\int_1^{+\infty} \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} + Q(\mathbf{x}) \sum_{t=1}^T (-s_t) \frac{\partial P_t}{\partial x_1}(\mathbf{x}) P_t(\mathbf{x})^{-(s_t+1)} \prod_{r \neq t} P_r(\mathbf{x})^{-s_r} \right) f_1(x_1) dx_1$

On en déduit :

$$Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s}) = - \int_{J^{N-1}} Q(1, x_2, \dots, x_N) \left( \prod_{t=1}^T P_t(1, x_2, \dots, x_N)^{-s_t} \right) f_1^1(1) \prod_{n=2}^N f_n(x_n) \prod_{n=2}^N dx_n$$

$$- Y\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s}\right) + \sum_{t=1}^T s_t Y\left(Q \frac{\partial P_t}{\partial x_1}, f_1^1, f_2, \dots, f_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t\right)$$

Les polynômes de  $N-1$  variables  $P_1(1, x_2, \dots, x_N), \dots, P_T(1, x_2, \dots, x_N)$  vérifient les hypothèses ad hoc, et donc, grâce à l'hypothèse de récurrence, le terme défini par une intégrale sur  $J^{N-1}$  admet un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}^T$ , ce qui permet de conclure.

Etape 2 :

pour tout  $d \geq 1$   $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de  $Y\left(\frac{\partial^d Q}{\partial x_1^d}, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s}\right)$  et de fonctions du

type :  $Y\left(\frac{\partial^i Q}{\partial x_1^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_1}, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t\right)$  où  $i \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

Preuve de l'étape 2 :

La preuve se fait par récurrence sur  $d$ .

Le rang  $d = 1$  résulte de l'étape 1.

Le passage de  $d$  à  $d+1$  se fait en combinant le résultat au rang  $d$  et l'étape 1 appliquée au polynôme  $\frac{\partial^d Q}{\partial x_1^d}$ .

Etape 3 :

pour  $1 \leq n \leq N$   $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de fonctions du type :

$Y\left(\frac{\partial^i Q}{\partial x_n^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_n}, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t\right)$  où  $i \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

Preuve de l'étape 3 :

Il suffit bien sûr de traiter le cas  $n = 1$ .

Pour obtenir le résultat pour  $n = 1$  il suffit d'appliquer l'étape 2 avec  $d = \deg_{x_1} Q + 1$ .

Etape 4 :

pour  $1 \leq n \leq N, \mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$  et  $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ , on définit  $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q)$  comme étant le sous espace vectoriel

de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$  engendré par les polynômes de la forme :  $\partial^{\beta} Q \prod_{k=1}^n \frac{\partial^{|\alpha_k|+1} P_{t_k}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha_k} \partial x_k}$  où :

$\beta \in \mathbb{N}^N, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^N$  et  $t_1, \dots, t_n \in [[1, T]]$  vérifient  $\forall 1 \leq t \leq T \quad u_t = \text{card}\{1 \leq k \leq n | t_k = t\}$ .

Il est clair que  $n \neq |\mathbf{u}| \Rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q) = \{0\}$ .

On fait les deux observations suivantes :

★  $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q)$  est stable par dérivation.

★  $1 \leq n \leq N-1, 1 \leq t \leq T$  et  $Q \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial x_{n+1}} \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q) \subset \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{e}_t}^{n+1}(Q)$ .

Etape 5 :

pour  $1 \leq n \leq N$  et  $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ ,  $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de fonctions du type :  $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ ,  $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q)$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

Preuve de l'étape 5 :

la preuve se fait par récurrence sur  $n \in [[1, N]]$ .

Pour  $n = 1$  cela résulte de l'étape 3.

Supposons le résultat vrai au rang  $n$ , où  $n \in [[1, N-1]]$ .

$Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est donc combinaison entière de fonctions du type :

$Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ ,  $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q)$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

Par ailleurs, par l'étape 3,  $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  est combinaison entière de fonctions du type :

$Y\left(\frac{\partial^i R}{\partial x_{n+1}^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_{n+1}}, h_1, \dots, h_N, \mathbf{s} + \mathbf{u} + \mathbf{e}_t\right)$  où  $i \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$  et  $h_1, \dots, h_N \in \mathcal{B}$ .

Grâce aux deux observations de l'étape 4  $\frac{\partial^i R}{\partial x_{n+1}^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_{n+1}} \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{e}_t}^{n+1}(Q)$ , d'où le résultat au rang  $n+1$ .

Etape 6 :

pour  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$  et  $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ , on note  $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$  engendré

par les polynômes de la forme :  $\partial^{\beta} Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$  où :

★  $\beta \in \mathbb{N}^N$

★ les  $F_t$  sont des parties finies de  $\mathbb{N}$ , disjointes deux à deux, et vérifiant  $|F_t| = u_t$

★  $\forall 1 \leq t \leq T$   $f_t$  est une fonction de  $F_t$  dans  $\mathbb{N}^N$

★ on peut associer aux  $f_t$  des parties finies de  $\mathbb{N}$ ,  $D_1, \dots, D_N$  disjointes deux à deux et telles que :

\*  $|D_1| = \dots = |D_N|$ ,

\*  $\bigsqcup_{n=1}^N D_n = \bigsqcup_{t=1}^T F_t$

\*  $1 \leq t \leq T, 1 \leq n \leq N$  et  $k \in D_n \cap F_t \Rightarrow f_t(k) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}$ .

Remarquons que  $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  est stable par dérivation.

Etape 7 :

$R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  et  $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{v}}(R) \Rightarrow S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$ .

Preuve de l'étape 7 :

$S$  est une combinaison linéaire de termes de la forme :  $\partial^{\beta} R \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F'_t} \partial^{f'_t(k)} P_t$  où :

$\beta \in \mathbb{N}^N, |F'_t| = v_t, f'_t : F'_t \rightarrow \mathbb{N}^N$  et  $D'_1, \dots, D'_N$  sont comme à l'étape 6.

$R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  donc  $\partial^{\beta} R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  donc  $\partial^{\beta} R$  est combinaison linéaire de termes de la forme :  $\partial^{\gamma} Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$

où  $\gamma \in \mathbb{N}^N$ ,  $|F_t| = u_t$ ,  $f_t : F_t \rightarrow \mathbb{N}^N$  et  $D_1, \dots, D_N$  sont comme à l'étape 6.

On peut imposer que  $\forall t, t' F_t \cap F_{t'} = \emptyset$ . Ceci entraîne :

$\forall n, t D_n \cap F_t' = F_t \cap D_n' = \emptyset$  et  $\forall n, n' D_n \cap D_{n'}' = \emptyset$ .

Pour conclure il nous suffit de voir que :

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \partial^\gamma Q \left( \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t \right) \left( \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t'} \partial^{f_t'(k)} P_t \right) \text{ est dans } \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q).$$

Pour  $1 \leq t \leq T$  on définit  $g_t : F_t \sqcup F_t' \rightarrow \mathbb{N}^N$  par :  $g_t(k) = f_t(k)$  si  $k \in F_t$  et  $g_t(k) = f_t'(k)$  si  $k \in F_t'$ .

Il vient alors que :  $U = \partial^\gamma Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t \sqcup F_t'} \partial^{g_t(k)} P_t$ .

Sous cette forme on va voir que  $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$ .

★ Les  $F_t \sqcup F_t'$  sont disjointes deux à deux et  $\forall 1 \leq t \leq T \quad |F_t \sqcup F_t'| = u_t + v_t$ .

★ Les  $D_n \sqcup D_n'$  sont disjointes deux à deux,  $\bigsqcup_{t=1}^T (F_t \sqcup F_t') = \bigsqcup_{n=1}^N (D_n \sqcup D_n')$  et  $|D_1 \sqcup D_1'| = \dots = |D_N \sqcup D_N'|$

★ Si  $k \in (D_n \sqcup D_n') \cap (F_t \sqcup F_t') = (D_n \cap F_t) \sqcup (D_n' \cap F_t')$ , alors :

\* soit  $k \in D_n \cap F_t$  et alors  $g_t(k) = f_t(k) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}$ ,

\* soit  $k \in D_n' \cap F_t'$  et alors  $g_t(k) = f_t'(k) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}$ .

On en conclut que l'on a bien  $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$ .

Etape 8 :

$Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T \Rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^N(Q) \subset \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ .

Preuve de l'étape 8 :

On pose  $S = \partial^\beta Q \prod_{k=1}^N \frac{\partial^{|\alpha_k|+1} P_{t_k}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha_k} \partial x_k}$  où :

$\beta \in \mathbb{N}^N$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}^N$  et  $t_1, \dots, t_N \in [[1, T]]$  vérifient  $\forall 1 \leq t \leq T \quad u_t = \text{card}\{1 \leq k \leq N \mid t_k = t\}$ .

Pour conclure il suffit de montrer que  $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ .

Pour  $1 \leq t \leq T$  on pose  $F_t = \{1 \leq k \leq N \mid t_k = t\}$  ; on a alors que  $|F_t| = u_t$ .

On constate que les  $F_t$  sont deux à deux disjoints et que  $\bigsqcup_{t=1}^T F_t = [[1, N]]$ .

On définit  $f_t : F_t \rightarrow \mathbb{N}^N$  par  $f_t(k) = \alpha_k + \mathbf{e}_k$ .

On pose  $D_n = \{n\}$ .

On constate alors :

\*  $|D_1| = \dots = |D_N|$

\*  $\bigsqcup_{n=1}^N D_n = [[1, N]]$

\* si  $k \in D_n \cap F_t$  alors  $k = n$  et donc  $f_t(k) = \alpha_n + \mathbf{e}_n \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}$ .

$$S = \partial^\beta Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \frac{\partial^{|\alpha_k|+1} P_{t_k}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha_k} \partial x_k} = \partial^\beta Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t, \text{ donc } S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q).$$

Etape 9 :

Soient  $m \geq 1$  et  $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ .

Alors  $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de fonctions du type :

$Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ ,  $|\mathbf{u}| = mN$ ,  $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

Preuve de l'étape 9 :

on raisonne par récurrence sur  $m \geq 1$ .

\* pour  $m = 1$  :

par l'étape 5  $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de fonctions du type  $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ ,  $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^N(Q)$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

On peut supposer  $|\mathbf{u}| = N$  (car si  $|\mathbf{u}| \neq N$  alors  $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}^N(Q) = \{0\}$ ). L'étape 8 donne donc le résultat.

\* supposons le résultat vrai au rang  $m \geq 1$ .

$Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de fonctions du type  $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  où :  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ ,  $|\mathbf{u}| = mN$ ,  $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

Par ailleurs, le résultat pour  $m = 1$  donne que  $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  est combinaison entière de fonctions du type  $Y(S, h_1, \dots, h_N, \mathbf{s} + \mathbf{u} + \mathbf{v})$  où  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^T$ ,  $|\mathbf{v}| = N$ ,  $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{v}}(R)$  et  $h_1, \dots, h_N \in \mathcal{B}$ .

L'étape 7 donne alors  $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$ , mais  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = (m+1)N$ , d'où le résultat au rang  $m+1$ .

Etape 10 : conclusion

On fixe  $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$  et  $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}$  jusqu'à la fin.

Soit  $m \geq 1$ .

Par l'étape 9  $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$  est combinaison entière de fonctions du type :

$Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ ,  $|\mathbf{u}| = mN$ ,  $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  et  $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$ .

$R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$  donc  $R$  s'écrit : comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme :

$\partial^{\beta} Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$  avec  $\beta \in \mathbb{N}^N$ ,  $|F_t| = u_t$ ,  $f_t : F_t \rightarrow \mathbb{N}^N$  et  $D_1, \dots, D_N$  comme à l'étape 6.

On a alors  $\forall n \ |D_n| = m$ .

Il vient :

$$\begin{aligned}
\prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t(\mathbf{x}) &= \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N \prod_{k \in F_t \cap D_n} \partial^{f_t(k)} P_t(\mathbf{x}) \\
&\ll \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N \prod_{k \in F_t \cap D_n} x_n^{-\epsilon_0} P_t(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N (x_n^{-\epsilon_0} P_t(\mathbf{x}))^{|F_t \cap D_n|} \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{n=1}^N \prod_{t=1}^T x_n^{-\epsilon_0 |F_t \cap D_n|} \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N P_t(\mathbf{x})^{|F_t \cap D_n|} \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{n=1}^N x_n^{-\epsilon_0 |D_n|} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{|F_t|} \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{n=1}^N x_n^{-\epsilon_0 m} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{u_t} \quad (\mathbf{x} \in J^N)
\end{aligned}$$

On pose  $q = \max\{\deg_{X_n} Q \mid 1 \leq n \leq N\}$  (on peut évidemment supposer  $Q \neq 0$ ).

On pose  $p = \max\{\deg_{X_n} P_t \mid 1 \leq n \leq N \ 1 \leq t \leq T\}$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$  que l'on va déterminer par la suite.

Soit  $K$  compact de  $\mathbb{C}^T$  inclus dans  $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall 1 \leq t \leq T \ \sigma_t > -a\}$ .

★ Soit  $1 \leq t \leq T$ .

Comme lors de la preuve de l'existence de  $\sigma_0$  on montre  $|P_t(\mathbf{x})^{-\sigma_t}| \ll |P_t(\mathbf{x})|^a \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K)$ .

On suppose désormais  $a > 0$ , alors  $P_t(\mathbf{x})^a \ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{pa} \quad (\mathbf{x} \in J^N)$ .

Des inégalités précédentes on déduit :  $P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{pa} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K)$ .

Posons  $S = \partial^\beta Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$  ; en combinant ce qui précède, il vient alors :

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-(s_t+u_t)} &\ll \partial^\beta Q(\mathbf{x}) \prod_{n=1}^N x_n^{-\epsilon_0 m} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{u_t} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-(s_t+u_t)} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K) \\
&\ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^q \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{-\epsilon_0 m} \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{Tpa} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K) \\
&\ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{q+Tpa-\epsilon_0 m} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K)
\end{aligned}$$

On suppose désormais que  $m > \frac{q+2}{\epsilon_0}$ .

On choisit  $a = \frac{\epsilon_0 m - (q+2)}{Tp}$  ; ceci est bien strictement positif.



Ce qui précède montre que  $Y(S, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$  est holomorphe sur  $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall 1 \leq t \leq T \sigma_t > -a\}$ .  
On en déduit que :

$Y(Q, f_1, \dots, f_N, \cdot)$  possède un prolongement holomorphe à  $\left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall 1 \leq t \leq T \sigma_t > \frac{q+2-\epsilon_0 m}{Tp} \right\}$ .

Ceci étant vrai pour tout  $m > \frac{2}{\epsilon_0}$ ,  $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \cdot)$  possède un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}^T$ .

Comme le montre l'exemple suivant, le théorème 7 peut ne plus être vrai si l'on supprime l'hypothèse c).

**Exemple 22.** On reprend le polynôme de l'exemple 12 :  $P(X, Y) = (X - Y)^2 X + X$ .

On définit  $f_1 : J \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f_1(x) = e^{ix}$  et  $f_2 : J \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f_2(y) = e^{-iy}$ .  $f_1$  et  $f_2$  appartiennent à  $\mathcal{B}(1)$ .

Alors :

$Y(1, P, f_1, f_2, \cdot)$  possède un prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}$ .

1 est l'unique pôle du prolongement, il est simple de résidu égal à  $\frac{\pi}{e}$ .

**Preuve :**

Par définition  $Y(1, P, f_1, f_2, s) = \int_{J^2} P(x, y)^{-s} e^{i(x-y)} dx dy$ .

On pose  $Y_1(s) = \int_{\{(x,y)|1 < x < y\}} P(x, y)^{-s} e^{i(x-y)} dx dy$ .

Soit  $f : ]1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \{(x, y) | 1 < x < y\}$  définie par  $f(u, v) = (u, u + v)$ .

$f$  est un  $C^1$  difféomorphisme dont le jacobien vaut partout 1.

En utilisant  $f$ , on voit que :  $Y_1(s) = \int_{]1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*} [(u - (u + v))^2 u + u]^{-s} e^{i(u - (u + v))} du dv$

Donc  $Y_1(s) = \int_1^{+\infty} u^{-s} du \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{-iv} dv = \frac{1}{s-1} \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{-iv} dv$

On pose  $Y_2(s) = \int_{\{(x,y)|1 < y < x\}} P(x, y)^{-s} e^{i(x-y)} dx dy$ .

Soit  $g : ]1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \{(x, y) | 1 < y < x\}$  définie par  $g(u, v) = (u + v, u)$ .

$g$  est un  $C^1$  difféomorphisme dont le jacobien vaut partout -1.

En utilisant  $g$ , on voit que :  $Y_2(s) = \int_{]1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*} [(u + v - u)^2 (u + v) + (u + v)]^{-s} e^{i(u + v - u)} du dv$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } Y_2(s) &= \int_{]1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*} (v^2 + 1)^{-s} (u + v)^{-s} e^{iv} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{iv} \left\{ \int_1^{+\infty} (u + v)^{-s} du \right\} dv \\ &= \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{iv} \frac{(1 + v)^{-s+1}}{s-1} dv \\ &= \frac{1}{s-1} \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} (v + 1)^{-s+1} e^{iv} dv \end{aligned}$$

Posons  $Y(s) = \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{-iv} dv + \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} (v + 1)^{-s+1} e^{iv} dv$ .

Le théorème 7 permet d'affirmer que  $Y$  admet un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}$ .

On a  $Y(1, P, f_1, f_2, s) = \frac{1}{s-1} Y(s)$ , on va donc chercher à évaluer  $Y(1)$ .

$$Y(1) = \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-1} e^{-iv} dv + \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-1} e^{iv} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} (v^2 + 1)^{-1} e^{iv} dv$$

C'est une application classique du théorème des résidus de montrer que cette dernière intégrale vaut  $\frac{\pi}{e}$ , d'où le résultat.

## Domaine de convergence de Z

**Notation 23.** Pour  $S \subset \mathbb{R}^T$ ,  $\text{int}(S)$  désigne l'intérieur (dans  $\mathbb{R}^T$ ) de  $S$ .

**Définition 24.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  tels que  $\forall 1 \leq t \leq T \quad \forall \mathbf{x} \in J^N \quad P_t(\mathbf{x}) > 0$ .

On pose :

$$\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T) = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_T) \in \mathbb{R}^T \mid Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mathbf{1}, \sigma_1, \dots, \sigma_T) \text{ converge}\}.$$

**Remarque 25.** Si, de plus,  $\boldsymbol{\mu}$  appartient à  $\mathbb{T}^N$ , alors on a :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, s_1, \dots, s_T) \text{ converge} \Leftrightarrow (\sigma_1, \dots, \sigma_T) \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T).$$

**Proposition 26.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  tels que  $\forall 1 \leq t \leq T \quad \forall \mathbf{x} \in J^N \quad P_t(\mathbf{x}) > 0$ . Alors  $\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$  est convexe (et donc connexe).

**Preuve :**

Soient  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}' \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

Fixons  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$  et posons  $a_t = P_t(\mathbf{m})^{-1}$ , il vient alors :

$$\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(\lambda\sigma_t + (1-\lambda)\sigma'_t)} = \prod_{t=1}^T a_t^{\lambda\sigma_t + (1-\lambda)\sigma'_t} = \left( \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma_t} \right)^\lambda \left( \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma'_t} \right)^{1-\lambda}$$

En utilisant l'inégalité  $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$ , valable pour  $a, b > 0$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , on voit que :

$$\left( \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma_t} \right)^\lambda \left( \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma'_t} \right)^{1-\lambda} \leq \lambda \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma_t} + (1-\lambda) \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma'_t}$$

On conclut de ce qui précède que  $\lambda\boldsymbol{\sigma} + (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}' \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$ .

**Lemme 27.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  tels que  $\forall 1 \leq t \leq T \quad P_t(\mathbf{x}) \gg 1 \quad (\mathbf{x} \in J^N)$ .

Soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^T$ .

Alors :  $\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T) + \mathbf{u} \subset \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$ .

**Preuve :**

c'est clair.

**Corollaire 28.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  tels que  $\forall 1 \leq t \leq T \quad P_t(\mathbf{x}) \gg 1 \quad (\mathbf{x} \in J^N)$ .

Soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^T$ .

Alors :  $\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T) + \mathbf{u} \subset \text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$ .

**Preuve :** cela découle du lemme 27.

**Proposition 29.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  tels que  $\forall 1 \leq t \leq T \ P_t(\mathbf{x}) \gg 1 \ (\mathbf{x} \in J^N)$ .  
 Soit  $1 \leq T_0 \leq T$ .

On suppose que  $\prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Soit  $\sigma_{T_0+1}, \dots, \sigma_T \in \mathbb{R}$ .

Alors :

il existe  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  tel que :  $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \sigma_0 \Rightarrow (\sigma_0, \dots, \sigma_{T_0}, \sigma_{T_0+1}, \dots, \sigma_T) \in \text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$ .

**Preuve :**

Soit  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{x})^{\sigma_0-1} \prod_{t=T_0+1}^T P_t(\mathbf{x})^{\sigma_t-1} \gg \left( \prod_{n=1}^N x_n \right)^2 \ (\mathbf{x} \in J^N)$ .

Alors  $(\sigma_0, \dots, \sigma_0, \sigma_{T_0+1}, \dots, \sigma_T) - \mathbf{1} \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$ .

Le corollaire 28 permet alors de conclure.

**Proposition 30.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  tels que  $\forall 1 \leq t \leq T \ P_t(\mathbf{x}) \gg 1 \ (\mathbf{x} \in J^N)$ .  
 Soit  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{T}^N$ .

Alors  $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$  est holomorphe sur  $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$ .

Preuve :

a) Montrons que pour  $C$  compact inclus dans  $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$ ,  $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$  converge normalement sur  $C$ .

Soit  $\boldsymbol{\sigma} \in C$  ; alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\boldsymbol{\sigma} - \epsilon \mathbf{1} \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$ .

Par hypothèse  $\exists c \in ]0, 1[$  tel que  $\forall 1 \leq t \leq T \ \forall \mathbf{x} \in J^N \ P_t(\mathbf{x}) \geq c$ .

Soit  $1 \leq t \leq T$ .

Pour  $\mathbf{u} \in ]0, 2\epsilon[^N$  et  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$  on a :

$P_t(\mathbf{m})^{-u_t} \leq c^{-u_t}$  et  $c^{-u_t} \leq c^{-2\epsilon}$  ; et donc  $P_t(\mathbf{m})^{-u_t} \leq c^{-2\epsilon}$ .

On déduit de ce qui précède que :

$$|Q(\mathbf{m})| \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(\sigma_t - \epsilon + u_t)} \ll |Q(\mathbf{m})| \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(\sigma_t - \epsilon)} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}, \mathbf{u} \in ]0, 2\epsilon[^N)$$

Ceci implique que  $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$  converge normalement sur  $\boldsymbol{\sigma} - \epsilon \mathbf{1} + ]0, 2\epsilon[^N$ .

Pour tout  $\boldsymbol{\sigma} \in C$  on a trouvé un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $\boldsymbol{\sigma}$  et sur lequel il y a convergence normale ;  
 $C$  étant compact, il y a convergence normale sur  $C$ .

b) Conclusion.

On définit  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  par  $p(\boldsymbol{\sigma} + i\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma}$ .

Soit  $K$  un compact de  $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$ .

$p(K)$  est alors un compact de  $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$  ; par a) il y a convergence normale sur  $p(K)$ , on en déduit la convergence normale sur  $K$ .

De la convergence sur tout compact inclus dans  $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$  on déduit l'holomorphie sur  $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$ .

# Représentation intégrale

**Notation 31.** On pose  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^T$ .

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit  $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\gamma^-(x) = \gamma(a + b - x)$ .

**Lemme 32.** Pour  $\epsilon > 0$  on définit :

$\lambda_\epsilon : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[ \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\lambda_\epsilon(x) = x + i\epsilon$  et  $\omega_\epsilon : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[ \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\omega_\epsilon(x) = x - i\epsilon$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On note :  $\lambda_{\epsilon,k} = \lambda_{\epsilon|[\frac{3}{2}, k+\frac{1}{2}]}$  et  $\omega_{\epsilon,k} = \omega_{\epsilon|[\frac{3}{2}, k+\frac{1}{2}]}$ .

On définit  $\gamma_{\epsilon,k} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\gamma_{\epsilon,k}(x) = k + \frac{1}{2} + i\epsilon x$ .

On note  $R_{\epsilon,k} = \left[\frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}\right] + i[-\epsilon, \epsilon]$ .

On définit  $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $e(z) = \exp(2i\pi z)$ .

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe où  $U$  est un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  contenant  $R_{\epsilon,k}$ .

Alors : 
$$\sum_{m=2}^k f(m) = \int_{\gamma_{\epsilon,1}^-} \frac{f(z)}{e(z)-1} dz + \int_{\omega_{\epsilon,k}} \frac{f(z)}{e(z)-1} dz + \int_{\gamma_{\epsilon,k}} \frac{f(z)}{e(z)-1} dz + \int_{\lambda_{\epsilon,k}^-} \frac{f(z)}{e(z)-1} dz$$

**Preuve :**

On définit  $g$  par  $g(z) = \frac{f(z)}{e(z)-1}$ ,  $g$  est alors méromorphe sur  $U$ .

Pour  $m \in [[2, k]]$   $\text{Res}(g, m) = \frac{f(m)}{e'(m)} = \frac{f(m)}{2i\pi}$ . Le résultat découle donc du théorème des résidus.

**Proposition 33.** Soient  $\epsilon > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $U$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  contenant  $R_{\epsilon,k}$ .

Soit  $f : U^N \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe.

Pour  $\tau \in \mathcal{S}_N$  on définit  $f_\tau : U^N \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f_\tau(z_1, \dots, z_N) = f(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(N)})$

Sous ces conditions  $\sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} f(\mathbf{m})$  est une somme de  $4^N$  termes de la forme :

$$\int_{(\gamma_{\epsilon,1}^-)^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon,k}^-)^{N_2} \times (\omega_{\epsilon,k})^{N_3} \times (\gamma_{\epsilon,k})^{N_4}} f_\tau(z_1, \dots, z_N) \prod_{n=1}^N \frac{1}{e(z_n)-1} dz$$

où  $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{N}$  vérifient  $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N$  et  $\tau \in \mathcal{S}_N$ .

**Preuve :**

elle se fait par récurrence sur  $N$  en itérant le lemme 32.

## Preuve du théorème 1

**Notation 34.** pour  $a, b \in \mathbb{N}$  tels que  $a \leq b$  on note :  $[[a, b]] = \{m \in \mathbb{N} \mid a \leq m \leq b\}$ .

Pour  $a \in \mathbb{N}$  on note  $[[a, +\infty[[ = \{m \in \mathbb{N} \mid a \leq m\}$ .

Le lemme suivant s'inspire fortement de l'analogie se trouvant dans [23].

**Lemme 35.** Soient  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  et  $\epsilon_0 > 0$  tels que :

i)  $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad P(\mathbf{x}) > 0$

ii)  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \partial^\alpha P(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} P(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$

Alors :

$\exists \epsilon > 0$  tel que :

i')  $\mathbf{x} \in J^N$  et  $\mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N \Rightarrow \Re(P(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) \geq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$

ii')  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \partial^\alpha P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \ll x_n^{-\epsilon_0} P(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N \quad \mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N).$

**Preuve :**

on note  $p = \deg(P)$ .

La formule de Taylor s'écrit :  $P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{(i\mathbf{y})^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + \sum_{0 < |\alpha| \leq p} \frac{(i\mathbf{y})^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha P(\mathbf{x})$

De l'hypothèse ii) on déduit qu'il existe  $c > 0$  tel que :  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \forall \mathbf{x} \in J^N \quad |\partial^\alpha P(\mathbf{x})| \leq cP(\mathbf{x})$ .

On pose  $A = c \sum_{0 < |\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!}$ .

Fixons  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ .

On a :  $\mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N \quad \alpha \neq \mathbf{0} \Rightarrow |\mathbf{y}^\alpha| \leq 2\epsilon$ .

De ce qui précède on déduit :  $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \forall \mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N \quad |P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})| \leq 2\epsilon AP(\mathbf{x})$

On pose  $\epsilon = \frac{1}{4A+2}$  ; on a alors :  $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \forall \mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N \quad |P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$ .

Il vient :

$\Re(P(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) = P(\mathbf{x}) + \Re(P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})) \geq P(\mathbf{x}) - |P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$

Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  tel que  $\alpha_n \geq 1$ . Alors :

$$(\partial^\alpha P)(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \sum_{|\beta| \leq p} \frac{(i\mathbf{y})^\beta}{\beta!} \partial^{\alpha+\beta} P(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} P(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N \quad \mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N)$$

**Lemme 36.** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $\mathbb{N}^{*N}$  peut se partitionner ainsi :

$$\mathbb{N}^{*N} = \bigsqcup_{j=1}^J A_j \quad \text{où } \forall j \quad A_j \text{ est de la forme } \prod_{n=1}^N B_n \text{ avec } B_n = \{1\} \text{ ou } B_n = [[2, +\infty[[.$$

**Preuve :**

elle se fait par récurrence sur  $N \geq 1$ .

**Preuve du théorème 1**

La preuve se décompose en 2 étapes.

Etape 1 :  $\mathbf{s} \mapsto Z^*(\mathbf{s}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\mathbf{m} \in [[2, +\infty[[^N} \mu^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$  possède un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}^T$ .

Preuve de l'étape 1.

Les hypothèses permettent de choisir  $\epsilon_0 > 0$  tel que :

$$\star \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \gg \left( \prod_{n=1}^N x_n \right)^{\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in J^N)$$

$$\star \alpha \in \mathbb{N}^N \quad \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha P_t}{P_t}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in J^N).$$

Pour  $1 \leq n \leq N$ , on écrit  $\mu_n = e^{i_n}$  où  $n \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Avec cette notation on a :

$$\sum_{\mathbf{m} \in [[2, +\infty[ ]^N} \mu^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} Q(\mathbf{m}) \prod_{n=1}^N e^{i_n m_n} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$$

Pour  $1 \leq t \leq T$  on applique le lemme 35 à  $P_t$ , ce qui fournit  $\epsilon_t > 0$ .

On pose  $\epsilon = \min\{\epsilon_t \mid 1 \leq t \leq T\}$ ,  $\epsilon$  est alors fixé pour toute la preuve.

Pour  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ , on définit  $f_{\mathbf{s}} : ([1, +\infty[ + i] - 2\epsilon, 2\epsilon[)^N \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N e^{i_n z_n}$ .

Grâce au choix de  $\epsilon$  ceci a un sens et  $f_{\mathbf{s}}$  est holomorphe.

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } \sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} Q(\mathbf{m}) \prod_{n=1}^N e^{i_n m_n} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} = \sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{m})$$

$R_{\epsilon, k} \subset ]1, +\infty[ + i] - 2\epsilon, 2\epsilon[$  donc on peut appliquer la proposition 33 à  $f_{\mathbf{s}}$ , ce qui permet d'écrire  $\sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{m})$  comme une somme de  $4^N$  intégrales. On va s'occuper de celles pour lesquelles  $\tau =$

$Id_{[[1, N]]}$ , les autres se traiteraient exactement de la même manière.

On se limite donc à des expressions de la forme :

$$\int_{(\gamma_{\epsilon, 1}^-)^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon, k}^-)^{N_2} \times (\omega_{\epsilon, k})^{N_3} \times (\gamma_{\epsilon, k})^{N_4}} Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N \frac{\exp(i_n z_n)}{e(z_n) - 1} d\mathbf{z}$$

soit encore :

$$(-1)^{N_1 + N_2} \int_{(\gamma_{\epsilon, 1})^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon, k})^{N_2} \times (\omega_{\epsilon, k})^{N_3} \times (\gamma_{\epsilon, k})^{N_4}} Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N \frac{\exp(i_n z_n)}{e(z_n) - 1} d\mathbf{z}$$

où  $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{N}$  vérifient  $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N$ .

Si  $N_4 \geq 1$  et si  $\sigma_1, \dots, \sigma_T$  sont assez grands, on montre par convergence dominée que cette expression tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

Si  $N_4 = 0$  et si  $\sigma_1, \dots, \sigma_T$  sont assez grands, on montre par convergence dominée que, lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , cette expression tend vers :

$$Y^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{s}) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (-1)^{N_1 + N_2} \int_{(\gamma_{\epsilon, 1})^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon})^{N_2} \times (\omega_{\epsilon})^{N_3}} Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N \frac{\exp(i_n z_n)}{e(z_n) - 1} d\mathbf{z}$$

On a donc montré qu'il existe  $r > 0$  tel que sur  $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \sigma_1, \dots, \sigma_T > r\}$   $Z^*$  est une combinaison linéaire d'intégrales de la forme  $Y^{N_1, N_2, N_3}$  à permutation près.

Pour conclure il nous suffit donc de montrer que  $Y^{N_1, N_2, N_3}$  possède un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}^T$ .

$\star$  Pour  $1 \leq n \leq N_1$  on définit  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ainsi :

$$f_n(x) = \frac{\exp(i_n \gamma_{\epsilon, 1}(x))}{e(\gamma_{\epsilon, 1}(x)) - 1} = \frac{\exp(i_n(\frac{3}{2} + i\epsilon x))}{\exp(2i\pi(\frac{3}{2} + i\epsilon x)) - 1} = -\exp\left(\frac{3}{2}i_n\right) \frac{\exp(-\epsilon_n x)}{\exp(-2\pi\epsilon x) + 1}$$

$f_n$  est manifestement continue.

★ Pour  $N_1 + 1 \leq n \leq N_1 + N_2$  on définit  $f_n : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[ \rightarrow \mathbb{C}$  ainsi :

$$f_n(x) = \frac{\exp(i_n \lambda_\epsilon(x))}{e(\lambda_\epsilon(x)) - 1} = \frac{\exp(i_n(x + i\epsilon))}{\exp(2i\pi(x + i\epsilon)) - 1} = -\exp(-\epsilon_n) \frac{\exp(i_n x)}{1 - \exp(-2\pi\epsilon) \exp(i2\pi x)}$$

$$\frac{n}{2\pi} \notin \mathbb{Z} \text{ donc (voir l'exemple 21) } f_n \in \mathcal{B}\left(\frac{3}{2}\right).$$

★ Pour  $N_1 + N_2 + 1 \leq n \leq N$  on définit  $f_n : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[ \rightarrow \mathbb{C}$  ainsi :

$$f_n(x) = \frac{\exp(i_n \omega_\epsilon(x))}{e(\omega_\epsilon(x)) - 1} = \frac{\exp(i_n(x - i\epsilon))}{\exp(2i\pi(x - i\epsilon)) - 1} = -\exp(\epsilon_n) \frac{\exp(i_n x)}{1 - \exp(2\pi\epsilon) \exp(i2\pi x)}$$

$$\frac{n}{2\pi} \notin \mathbb{Z} \text{ donc (voir l'exemple 21) } f_n \in \mathcal{B}\left(\frac{3}{2}\right).$$

Pour  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$  et  $N_1, N_2, N_3$  de somme  $N$ , on définit  $P^{N_1, N_2, N_3} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$  par :

$$P^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) = P(\gamma_{\epsilon,1}(x_1), \dots, \gamma_{\epsilon,1}(x_{N_1}), \lambda_\epsilon(x_{N_1+1}), \dots, \lambda_\epsilon(x_{N_1+N_2}), \omega_\epsilon(x_{N_1+N_2+1}), \dots, \omega_\epsilon(x_N))$$

$$= P\left(\frac{3}{2} + i\epsilon x_1, \dots, \frac{3}{2} + i\epsilon x_{N_1}, x_{N_1+1} + i\epsilon, \dots, x_{N_1+N_2} + i\epsilon, x_{N_1+N_2+1} - i\epsilon, \dots, x_N - i\epsilon\right)$$

Muni de ces notations, on constate que :

$$Y^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{s}) = (-1)^{N_1+N_2} (i\epsilon)^{N_1} \int_{[-1,1]^{N_1} \times [\frac{3}{2}, +\infty[^{N-N_1}} Q^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})^{-s_t} \prod_{n=1}^N f_n(x_n) d\mathbf{x}$$

Il nous suffit maintenant de vérifier les hypothèses du théorème 7 (que l'on applique ici sur

$[-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^{N-N_1}$  et non sur  $[-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$ , ce qui ne pose clairement aucun problème).

\*  $f : [-1, 1]^{N_1} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(x_1, \dots, x_{N_1}) = \prod_{n=1}^{N_1} f_n(x_n)$  est clairement continue.

\* On a déjà vu que  $f_{N_1+1}, \dots, f_N \in \mathcal{B}\left(\frac{3}{2}\right)$ .

\*  $P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) = P_t\left(\left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N\right) + i(\epsilon x_1, \dots, \epsilon x_{N_1}, \epsilon, \dots, \epsilon, -\epsilon, \dots, -\epsilon)\right)$

or on a déterminé  $\epsilon$  grâce au lemme 35, donc :

$$\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \quad \Re\left(P_t^{N_1, N_2, N_3}(x_1, \dots, x_N)\right) \geq \frac{1}{2} P_t\left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N\right)$$

On déduit de ceci que  $\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^{N-N_1}$  on a :

$$\star \Re\left(P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})\right) > 0$$

$$\star \left|P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})\right| \geq \frac{1}{2} P_t\left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N\right)$$

De cette dernière inégalité, on déduit toute suite :

$$\left|P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})\right| \gg 1 \quad \left(\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^{N-N_1}\right)$$

$$\text{et } \forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^{N-N_1} \quad \prod_{t=1}^T \left|P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})\right| \geq \left(\frac{1}{2}\right)^T \prod_{t=1}^T P_t\left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N\right)$$

Il vient :

$$\prod_{t=1}^T |P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})| \gg \left( \prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{\epsilon_0} \left( \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \right)$$

Si  $\alpha \in \{0\}^{N_1} \times \mathbb{N}^{N-N_1}$  et  $N_1 + 1 \leq n \leq N$  sont tels que  $\alpha_n \geq 1$ , alors :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) &= (\partial^\alpha P_t) \left( \frac{3}{2} + i\epsilon x_1, \dots, \frac{3}{2} + i\epsilon x_{N_1}, x_{N_1+1} + i\epsilon, \dots, x_{N_1+N_2} + i\epsilon, x_{N_1+N_2+1} - i\epsilon, \dots, x_N - i\epsilon \right) \\ &\ll x_n^{-\epsilon_0} P_t \left( \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N \right) \left( \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \right) \\ &\ll x_n^{-\epsilon_0} |P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})| \left( \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi s'achève les vérifications des hypothèses du théorème 7, ce qui termine la preuve de l'étape 1.

Etape 2 : conclusion.

On va montrer le théorème 1 par récurrence sur  $N \geq 1$ .

★ Pour  $N = 1$ , il suffit d'écrire :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mu, \mathbf{s}) = \mu Q(1) \prod_{t=1}^T P_t(1)^{-s_t} + \sum_{m \geq 2} \mu^m Q(m) \prod_{t=1}^T P_t(m)^{-s_t}$$

L'étape 1 permet alors de conclure.

★ Si le résultat est vrai pour tout  $n$  compris entre 1 et  $N - 1$ , alors grâce au lemme 36 et à l'étape 1, on voit qu'il est vrai pour  $N$ .

## Lemme d'échange et valeurs aux points de $(-\mathbb{N})^T$

**Proposition 37.** Soient  $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  et  $1 \leq T_0 \leq T - 1$ .

On suppose que :

a)  $P_1, \dots, P_T$  vérifient HR

b)  $\prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty$ .

Soient de plus  $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$  et  $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$ .

Alors :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -k_1, \dots, -k_T) = Z \left( Q \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t}, P_1, \dots, P_{T_0}, \boldsymbol{\mu}, -k_1, \dots, -k_{T_0} \right)$$

**Preuve :**

On définit  $f : \mathbb{C}^{T_0} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f(s_1, \dots, s_{T_0}) = Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, s_1, \dots, s_{T_0}, -k_{T_0+1}, \dots, -k_T)$ .



$f$  est holomorphe.

Par la proposition 29 il existe  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour  $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \sigma_0$  on ait :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \sigma_1, \dots, \sigma_{T_0}, -k_{T_0+1}, \dots, -k_T) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{m})^{-\sigma_t} \prod_{t=T_0+1}^T P_t(\mathbf{m})^{k_t}$$

On définit  $g : \mathbb{C}^{T_0} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $g(s_1, \dots, s_{T_0}) = Z \left( Q \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t}, P_1, \dots, P_{T_0}, \boldsymbol{\mu}, s_1, \dots, s_{T_0} \right)$ .

$g$  est holomorphe.

Par la proposition 29 il existe  $\sigma'_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour  $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \sigma'_0$  on ait :

$$Z \left( Q \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t}, P_1, \dots, P_{T_0}, \boldsymbol{\mu}, s_1, \dots, s_{T_0} \right) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t} \prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{m})^{-\sigma_t}$$

On constate que pour  $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \max(\sigma_0, \sigma'_0)$  on a  $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0}) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0})$ ; par prolongement analytique on en déduit que  $f = g$ .

En particulier  $f(-k_1, \dots, -k_{T_0}) = g(-k_1, \dots, -k_{T_0})$ , ce qui est exactement le résultat voulu.

#### Preuve du lemme d'échange :

La proposition 37 permet d'affirmer que les quantités considérées sont toutes deux égales à :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'}, \boldsymbol{\mu}, -k_1, \dots, -k_T, -l_1, \dots, -l_{T'}).$$

**Lemme 38.** Soient  $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$  et  $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ .

On note  $Q = \sum_{\alpha \in S} a_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha}$ .

Alors :

$$Z(Q, X_1, \dots, X_N, \boldsymbol{\mu}, 0, \dots, 0) = \sum_{\alpha \in S} a_{\alpha} \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$$

**Preuve :**

si  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  sont suffisamment grands on a :

$$\begin{aligned}
Z(Q, X_1, \dots, X_N, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) &= Z \left( \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha, X_1, \dots, X_N, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} \right) \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha Z(\mathbf{X}^\alpha, X_1, \dots, X_N, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} \mathbf{m}^\alpha \prod_{n=1}^N m_n^{-s_n} \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 1} \prod_{n=1}^N \mu_n^{m_n} m_n^{\alpha_n - s_n} \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \sum_{m_n \geq 1} \mu_n^{m_n} m_n^{\alpha_n - s_n} \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(s_n - \alpha_n)
\end{aligned}$$

Par prolongement analytique, on a donc :

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{C}^N \quad Z(Q, X_1, \dots, X_N, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(s_n - \alpha_n)$$

Il suffit maintenant de faire  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  dans cette égalité pour obtenir le résultat cherché.

### Preuve du théorème 3

$$\begin{aligned}
Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -k_1, \dots, -k_T) &= Z \left( Q \prod_{n=1}^N X_n^0, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -k_1, \dots, -k_T \right) \\
&\text{grâce au lemme 2} \quad = Z \left( Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}, X_1, \dots, X_N, \boldsymbol{\mu}, 0, \dots, 0 \right) \\
&\text{grâce au lemme 38} \quad = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)
\end{aligned}$$

## Une formule pour les valeurs de $\zeta_\mu$ aux entiers négatifs

Le lemme suivant se trouve dans [40].

**Lemme 39.** *Soit  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  une suite de nombres complexes.*

*On pose  $Z(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{m^s}$  et l'on suppose qu'il existe  $s \in \mathbb{C}$  tel que cette série converge.*

Grâce à cette hypothèse, on peut définir  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$  par :  $f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m e^{-mx}$ .

On suppose qu'il existe une suite  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de complexes telle que, pour tout  $K \in \mathbb{N}^*$ , on ait au voisinage de 0 :  $f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k x^k + O(x^K)$ .

Alors :  $Z$  se prolonge holomorphiquement à  $\mathbb{C}$  et  $\forall k \in \mathbb{N} \ Z(-k) = (-1)^k k! c_k$ .

Nous aurons besoin des nombres de Stirling de seconde espèce. Rappelons en tout d'abord la définition :

**Définition 40.** Soient  $k, \ell \in \mathbb{N}$ .

Par définition le nombre de Stirling de second espèce (associé à  $(k, \ell)$ ) est le nombre de partitions en  $\ell$  parties d'un ensemble à  $k$  éléments. Cet entier naturel est noté  $S(k, \ell)$ .

**Exemple 41.**  $S(0, 0) = 1$  ; pour  $k \in \mathbb{N} \ S(k, k) = 1$  ; si  $0 \leq k < \ell$  alors  $S(k, \ell) = 0$ .

On va maintenant rappeler quelques propriétés élémentaires de ces nombres. Pour les preuves on renvoie par exemple à [20].

**Lemme 42.**  $\forall k \in \mathbb{N} \ \forall \ell \in \mathbb{N}^* \ S(k+1, \ell) = \ell S(k, \ell) + S(k, \ell-1)$ .

**Lemme 43.** Pour tous  $k, \ell \in \mathbb{N}$  on a :  $S(k, \ell) = \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^k$ .

**Lemme 44.** Soit  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$ . On définit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f = g \circ \exp$ .

Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a :  $\forall x \in \mathbb{R} \ f^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x)$ .

**Preuve :**

elle se fait par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ .

★ Pour  $k = 0$  cela découle de  $S(0, 0) = 1$ .

★ Si l'assertion est vraie au rang  $k$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) \left( \ell e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) + e^{\ell x} e^x g^{(\ell+1)}(e^x) \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) \ell e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) + \sum_{\ell=1}^{k+1} S(k, \ell-1) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \end{aligned}$$

$S(k, k+1) = 0$  donc :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \sum_{\ell=1}^{k+1} [\ell S(k, \ell) + S(k, \ell-1)] e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1} S(k+1, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k+1} S(k+1, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Nous pouvons maintenant prouver le :

**Lemme 45.** *Soit  $\mu \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ .*

*Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a :  $\zeta_{\mu}(-k) = \frac{(-1)^k \mu}{1-\mu} \sum_{\ell=0}^k \frac{\ell! S(k, \ell)}{(\mu-1)^{\ell}}$ .*

**Preuve :**

$$\forall x > 0 \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \mu^m e^{-mx} = \sum_{m=1}^{+\infty} (\mu e^{-x})^m = \mu e^{-x} \frac{1}{1 - \mu e^{-x}} = \frac{\mu}{e^x - \mu}$$

On définit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f(x) = \frac{\mu}{e^x - \mu}$  et  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$  par  $g(y) = \frac{\mu}{y - \mu}$ .

$g$  est  $C^\infty$  et  $f = g \circ \exp$  donc 44 s'applique et donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x).$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad g(y) = -\mu \frac{1}{\mu - y} \text{ donc : } \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad g^{(\ell)}(y) = -\mu \frac{\ell!}{(\mu - y)^{\ell+1}}.$$

$$\text{De ce qui précède on déduit que : } f^{(k)}(0) = \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) \left( -\mu \frac{\ell!}{(\mu - 1)^{\ell+1}} \right),$$

on peut maintenant conclure en utilisant 39.

## Preuve des théorèmes 4 et 5

**Preuve :**

soit  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ . On note  $S_{\mathbf{k}}$  le support de  $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}$ . Soit  $(a_{\alpha})_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}}$  telle que  $\sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} a_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha} = Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}$ .

Le théorème B dit que  $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} a_{\alpha} \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$ .

On va maintenant utiliser le lemme de la section suivante sous la forme suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \zeta_\mu(-k) = \frac{(-1)^k \mu}{1 - \mu} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{\ell! S(k, \ell)}{(\mu - 1)^\ell}.$$

Dans cette formule la somme est en réalité une somme finie.

Dans le calcul qui suit toutes les sommes sont en réalité des sommes finies.

$$\begin{aligned} Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) &= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[ a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \left( \frac{(-1)^{\alpha_n} \mu_n}{1 - \mu_n} \sum_{\ell_n \in \mathbb{N}} \frac{\ell_n! S(\alpha_n, \ell_n)}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right) \right] \\ &= \frac{\mu^1}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[ (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \sum_{\ell_n \in \mathbb{N}} \frac{\ell_n! S(\alpha_n, \ell_n)}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right] \\ &= \frac{\mu^1}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[ (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N} \prod_{n=1}^N \frac{\ell_n! S(\alpha_n, \ell_n)}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right] \\ &= \frac{\mu^1}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N} \left\{ \prod_{n=1}^N \left( \frac{\ell_n!}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right) \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left( (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N S(\alpha_n, \ell_n) \right) \right\} \end{aligned}$$

Pour  $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N$ , on définit  $Z_{\boldsymbol{\ell}}: (-\mathbb{N})^T \rightarrow \mathbb{Q}$  par :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^T \quad Z_{\boldsymbol{\ell}}(-\mathbf{k}) = \prod_{n=1}^N \left( \frac{\ell_n!}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right) \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left( (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N S(\alpha_n, \ell_n) \right)$$

et l'on remarque que  $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$   $|Z_\ell(-\mathbf{k})|_p \leq \prod_{n=1}^N \frac{|\ell_n!|_p}{|\mu_n - 1|_p^{\ell_n}}$ .

En utilisant 43 il vient :

$$\begin{aligned}
Z_\ell(-\mathbf{k}) &= \prod_{n=1}^N \left( \frac{\ell_n!}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right) \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} \left\{ (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \prod_{n=1}^N \left[ \frac{1}{\ell_n!} \sum_{j_n=0}^{\ell_n} \left( (-1)^{\ell_n - j_n} \binom{\ell_n}{j_n} j_n^{\alpha_n} \right) \right] \right\} \\
&= (1 - \mu)^{-\ell} \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} \left\{ (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \prod_{n=1}^N \left[ \sum_{j_n=0}^{\ell_n} \left( (-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} j_n^{\alpha_n} \right) \right] \right\} \\
&= (1 - \mu)^{-\ell} \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} \left\{ (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left[ \prod_{n=1}^N \left( (-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} j_n^{\alpha_n} \right) \right] \right\} \\
&= (1 - \mu)^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ \prod_{n=1}^N \left[ (-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} \right] \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} \left[ (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \prod_{n=1}^N j_n^{\alpha_n} \right] \right\} \\
&= (1 - \mu)^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ \prod_{n=1}^N \left[ (-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} \right] \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} \left[ a_\alpha \prod_{n=1}^N (-j_n)^{\alpha_n} \right] \right\} \\
&= (1 - \mu)^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ (-1)^{|\mathbf{j}|} \binom{\ell}{\mathbf{j}} Q(-\mathbf{j}) \prod_{t=1}^T P_t(-\mathbf{j})^{k_t} \right\}
\end{aligned}$$

Pour  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  on note  $w(x)$  le teichmüller de  $x$  et  $\langle x \rangle = \frac{x}{w(x)}$ .

Soient  $t \in \{1, \dots, T\}$  et  $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^N$ .

On remarque que si  $k_t \in \mathbb{N}$  vérifie  $k_t = r_t [p - 1]$  alors  $P_t(-\mathbf{j})^{k_t} = w(P_t(-\mathbf{j}))^{r_t} \langle P_t(-\mathbf{j}) \rangle^{k_t}$ .

Cela nous incite à définir  $Z_\ell^{\mathbf{r}}: \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$  par :

$$Z_\ell^{\mathbf{r}}(s_1, \dots, s_T) = (1 - \mu)^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} (-1)^{|\mathbf{j}|} \binom{\ell}{\mathbf{j}} Q(-\mathbf{j}) \prod_{t=1}^T w(P_t(-\mathbf{j}))^{r_t} \langle P_t(-\mathbf{j}) \rangle^{-s_t}$$

Soit  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$  vérifiant  $\forall t \in \{1, \dots, T\}$   $k_t = r_t [p - 1]$ . Alors :

$$Z_\ell^{\mathbf{r}}(-\mathbf{k}) = Z_\ell(-\mathbf{k}) \text{ et donc, grâce à une remarque précédente : } |Z_\ell^{\mathbf{r}}(-\mathbf{k})|_p \leq \prod_{n=1}^N \frac{|\ell_n!|_p}{|\mu_n - 1|_p^{\ell_n}}.$$

Comme  $Z_\ell^{\mathbf{r}}$  est continue et que  $-\prod_{t=1}^T (r_t + (p - 1)\mathbb{N})$  est dense dans  $\mathbb{Z}_p^T$  on en déduit que :

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{Z}_p^T \quad |Z_\ell^{\mathbf{r}}(\mathbf{s})|_p \leq \prod_{n=1}^N \frac{|\ell_n!|_p}{|\mu_n - 1|_p^{\ell_n}}$$

$\frac{|\ell!|_p}{|\mu_n - 1|_p^{\ell}} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$  donc la définition suivante a un sens :

on définit  $Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot): \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$  par :  $Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^1}{(1 - \boldsymbol{\mu})^1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^T} Z_\ell^{\mathbf{r}}(\mathbf{s})$ .

Ceci convient clairement.

### Remerciements :

Durant l'élaboration de ce travail j'ai été encadré par Driss Essouabri. Son encadrement fut de grande qualité, tant sur le plan scientifique qu'humain. Qu'il en soit ici remercié !

Je tiens aussi à remercier Ben Lichtin pour sa lecture attentive et constructive de ce travail.

### Références

- [1] **Akiyama, Shigeki ; Egami, Shigeki ; Tanigawa, Yoshio** Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers. *Acta Arith.* 98, No.2, 107-116 (2001).
- [2] **Akiyama, Shigeki ; Ishikawa, Hideaki** On analytic continuation of multiple  $L$ -functions and related zeta functions. Jia, C ; K.Matsumoto (ed.) , *Analytic number theory. Proceedings of the 1st China-Japan seminar on number theory, Beijing, China, September 13-17, 1999 and the annual conference on analytic number theory, Kyoto, Japan, November 29-December 3, 1999.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. *Dev. Math.* 6, 1-16 (2002)
- [3] **Akiyama, Shigeki ; Tanigawa, Yoshio** Multiple zeta values at non-positive integers, *The Ramanujan Journal*, vol. 5, no.4 (2001) 327-351.
- [4] **Arakawa, Tsuneo ; Kaneko, Masanobu** Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions. *Nagoya Math. J.* 153, 189-209 (1999).
- [5] **Barsky, Daniel.** Fonctions zeta  $p$ -adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels. *Groupe Etude Anal. Ultrametrique*, 5e Année 1977/78, Exposé No.16, 23 P. (1978).
- [6] **Cartier, Pierre** Séminaire Bourbaki. Volume 2000-01 Exposé 885 Mars 2001.
- [7] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta  $p$ -adiques. *Invent.Math.* 51, 29-59 (1979).
- [8] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme. *Ann. Inst. Fourier* 31, No.4, 1-35 (1981).
- [9] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs de séries de Dirichlet associées à un polynôme.I. *J. Number Theory* 14, 32-64 (1982).
- [10] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Prolongement de certaines séries de Dirichlet. *Am. J. Math.* 105, 13-58 (1983).
- [11] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme. II. *Am. J. Math.* 106, 255-299 (1984).
- [12] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées. *J. Number Theory* 23, 1-54 (1986).
- [13] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme. III. *Am. J. Math.* 109, 71-89 (1987).
- [14] **K.W. Chen ; M. Eie.** A note on generalized Bernoulli numbers. *Pac. J. Math.* 199, No.1, 41-59 (2001).
- [15] **Coates, J. ; Lichtenbaum, S.** On  $l$ -adic zeta functions. *Ann. Math.* (2) 98, 498-550 (1973).
- [16] **Coates, J. ; Sinnott, W.** On  $p$ -adic  $L$ -functions over real quadratic fields. *Invent. Math.* 25, 253-279 (1974).

- [17] **Coates, J. ; Sinnott, W.** Integrality properties of the values of partial zeta functions. Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 34, 365-384 (1977).
- [18] **Coates, John.** p-adic L-functions and Iwasawa's theory. Algebr. Number Fields, Proc. Symp. London math. Soc., Univ. Durham 1975, 269-353 (1977).
- [19] **Colmez, Pierre.** Résidu en  $s = 1$  des fonctions zêta p-adiques. Invent. Math. 91, No.2, 371-389 (1988).
- [20] **Comtet, Louis.** Analyse combinatoire. Tome 2. Le mathématicien. 5. Paris : Presses Universitaires de France. (1970).
- [21] **Deligne, Pierre ; Ribet, Kenneth A.** Values of Abelian L-functions at negative integers over totally real fields. Invent. Math. 59, 227-286 (1980).
- [22] **Egami, Shigeki ; Matsumoto, Kohji** Asymptotic expansions of multiple zeta functions and power mean values of Hurwitz zeta functions. J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 66, No.1, 41-60 (2002).
- [23] **D. Essouabri.** Singularités de séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et application à la théorie analytique des nombres. Ann. Inst. Fourier 47, No.2, 429-483 (1997).
- [24] **Fresnel, Jean** Valeurs des fonctions zeta aux entiers négatifs. Sem. Theorie Nombres 1970-1971, Univ. Bordeaux , No.27, 30 p. (1971)
- [25] **Kubota, T. ; Leopoldt, H.W.** Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I : Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen J. Reine Angew. Math. 214/215, 328-339 (1964).
- [26] **B. Lichtin.** Generalized Dirichlet series and b-functions. Compos. Math. 65, No.1, 81-120 (1988).
- [27] **B. Lichtin.** The asymptotics of a lattice point problem associated to a finite number of polynomials. I. Duke Math. J. 63, No.1, 139-192 (1991).
- [28] **B. Lichtin.** The asymptotics of a lattice point problem associated to a finite number of polynomials. II. Duke Math. J. 77, No.3, 699-751 (1995).
- [29] **K. Mahler.** Über einer Satz von Mellin. Mathematische Annalen 100, p.384-395 (1928).
- [30] **Klingen, Helmut.** Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion (German) Math. Ann. 145, 265-272 (1962).
- [31] **R.H. Mellin.** Eine Formel für den Logarithmus transcenderter Funktionen von endlichen Geschlecht. Acta Soc. Scient. Fennicæ, 29, No.4 (1900).
- [32] **P. Sargos.** Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables. Ann. Inst. Fourier 34, No.3, 83-123 (1984).
- [33] **P. Sargos.** Thèse d'état. Université de Bordeaux I (1987).
- [34] **Serre, Jean-Pierre** Cohomologie des groupes discrets. (Cohomology of discrete groups). Prospects Math., Ann. Math. Stud. 70, 77-169 (1971).
- [35] **Serre, Jean-Pierre** Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques. Modular Functions one Variable III, Proc. internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972, Lect. Notes Math. 350, 191-268 (1973).
- [36] **T. Shintani** On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 23, 393-417 (1976).
- [37] **Siegel, Carl Ludwig.** Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. Kl. 1968, 7-38 (1968).



- [38] **Siegel, Carl Ludwig.** Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Kl. 1970, 15-56 (1970).
- [39] **Swinnerton-Dyer H.P.F.** On  $l$ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms. Modular Functions one Variable III, Proc. internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972, Lect. Notes Math. 350, 1-55 (1973).
- [40] **Zagier, Don.** Valeurs des fonctions zeta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs. Astérisque 41-42, 135-151 (1977)
- [41] **Zagier, Don.** Values of zeta functions and their applications. Joseph, A. (ed.) et al., First European congress of mathematics (ECM), Paris, France, July 6-10, 1992. Volume II : Invited lectures (Part 2). Basel : Birkhäuser. Prog. Math. 120, 497-512 (1994).
- [42] **Zhao, Jianqiang** Analytic continuation of multiple zeta functions. Proc. Am. Math. Soc. 128, No.5, 1275-1283 (2000).